www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE DE L'AIR ANNEE 1989

PREMIERE EPREUVE DE

(Durée : 3 h 00 - Cœfficient : 7)

MATHEMATIQUES

On veillera à justifier tous les résultats.

N.B. : 1.) Dans tout le problème, le corps de base est $\mathbb{R}$.

2.) n désigne un entier positif ou nul.

(E_n) désigne l'équation différentielle :

$$(E_n) \qquad xy'' - 2ny' - xy = 0.$$

On entend par solution de (E_n) une application y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant (E_n).

—==oOOo==—

1.) Si Ψ_n est une solution de (E_n) telle que $\Psi_n(0) = 0$, montrer que l'application Ψ_{n+1} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\Psi_{n+1}(x) = \int_0^x t\,\Psi_n(t)\,dt,$$

est une solution de (E_{n+1}) telle que $\Psi_{n+1}(0) = 0$.

2.) On pose :

$$A_o(x) = \text{sh}x.$$

A_o est visiblement solution de (E_o). A l'aide de la relation de récurrence :

$$A_{n+1}(x) = \int_0^x t\,A_n(t)\,dt,$$

on définit, grâce à la question 1.), une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que, pour tout n entier naturel, A_n soit solution de (E_n) et $A_n(0) = 0$.

a) Etudier la parité de A_n.

b) Expliciter $A_1(x)$ et $A_2(x)$.

Etudier les variations de A_1 et A_2 sur $[0, +\infty[$ et donner l'allure des graphes correspondants, dont on précisera le sens de concavité.

c) Etudier de même les variations de A_n, pour $n \geqslant 3$, sur $[0, +\infty[$ et indiquer l'allure et la concavité du graphe de A_n.

Montrer l'existence d'une constante strictement positive C_n, dont on précisera une valeur possible, telle que, pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n(x) \geqslant C_n\,x^{2n+1}.$$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{A_n(x)}{x}$.

d) Soit $x_o > 0$. Montrer, pour $t \in [0, x_o]$, les inégalités :

$$0 \leqslant A_1(t) \leqslant \frac{t^2}{2}\,\text{sh}x_o, \qquad 0 \leqslant A_2(t) \leqslant \frac{t^4}{2.4}\,\text{sh}x_o.$$

En déduire, pour n entier naturel quelconque, un encadrement de $A_n(t)$, que l'on justifiera.

e) A l'aide du résultat précédent, déterminer, pour x réel quelconque fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n(x)$.

f) Montrer que, pour tout n entier naturel, A_n est développable en série entière de rayon de convergence infini.

Ecrire ce développement en série entière.

3.) a) Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(x)\,\text{ch}x + Q(x)\,\text{sh}x = 0,$$

Montrer que P et Q sont nuls.

b) α) Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_p(x) = \int_0^x t^{2p}\,\text{ch}\,t\,dt, \qquad J_p(x) = \int_0^x t^{2p+1}\,\text{sh}\,t\,dt.$$

Montrer qu'il existe dans $\mathbb{R}[X]$ deux polynômes pairs, P_p et R_p, et deux polynômes impairs, Q_p et T_p, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ I_p(x) = P_p(x)\,\text{sh}x + Q_p(x)\,\text{ch}x,$$

$$J_p(x) = R_p(x)\,\text{sh}x + T_p(x)\,\text{ch}x.$$

.../...

β) Pour tout n entier naturel, montrer l'existence d'un polynôme pair U_n et d'un polynôme impair V_n de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A_n(x) = U_n(x)\ \mathrm{sh}x - V_n(x)\ \mathrm{ch}x.$$

c) Montrer que (U_n, V_n) est l'unique couple (U,V) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A_n(x) = U(x)\ \mathrm{sh}x - V(x)\mathrm{ch}x.$$

d) On pose, si $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n(x) = U_n(x)\ \mathrm{ch}x - V_n(x)\ \mathrm{sh}x.$$

Quelle est la parité de B_n ?

Montrer que B_n est solution de (E_n).

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U'_{n+1}(x) = V_{n+1}(x) + x\,U_n(x),$$

$$V'_{n+1}(x) = U_{n+1}(x) + x\,V_n(x),$$

et en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad B'_{n+1}(x) = x\,B_n(x).$$

e) Montrer que, pour $n \geqslant 2$, on a l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad A_n(x) = -(2n-1)\,A_{n-1}(x) + x^2\,A_{n-2}(x).$$

Montrer ensuite que les U_n, les V_n et les B_n vérifient les mêmes relations de récurrence que les A_n.

f) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \ U_n(x)\,V_{n-1}(x) - V_n(x)\,U_{n-1}(x) = (-1)^{n-1}\,x^{2n-1}.$$

g) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ U_n(0) = V'_n(0) = (-1)^n \times 1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1).$$

4.)

a) Soit $k \in \mathbb{N}$.

Montrer que tous les coefficients de U_{2k} et V_{2k} sont positifs ou nuls et que ceux de U_{2k+1} et V_{2k+1} sont négatifs ou nuls.

En déduire, pour tout n entier naturel, le nombre de zéros réels de U_n et V_n.

b) On pose, si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n(x) = \frac{V_n(x)}{U_n(x)}.$$

Montrer que, x étant fixé :

$$\lim_{n \to +\infty} W_n(x) = \mathrm{th}x.$$

5.) Pour $n \in \mathbb{N}$ donné, déterminer l'ensemble des solutions de (E_n).

6.)

a) Expliciter B_0, B_1, B_2, B_3.

Etudier les variations de ces quatre fonctions sur $[0, +\infty[$ et le nombre de zéros de chacune (aucun calcul approché de ces zéros n'est demandé).

b) Montrer que pour tout entier positif ou nul k :

- $\lim_{x \to +\infty} B_{2k}(x) = \lim_{x \to +\infty} B_{2k+1}(x) = +\infty$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ B_{2k}(x) > 0$;
- l'équation $B_{2k+1}(x) = 0$ a une solution unique sur $[0, +\infty[$.

---=oOo=---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail